

数学 I

入学試験問題・解答冊子

1. 試験開始の合図があるまで、この冊子の中を見てはいけません。
2. この冊子は、11 ページあります。
試験中に冊子の印刷不鮮明、ページの落丁・乱丁等に気づいた場合は、手を挙げて監督者に知らせなさい。
3. 解答は、この冊子の各設問の解答欄に記入しなさい。
4. この冊子の表紙に受験番号、氏名の記入欄があるので、監督者の指示に従って記入しなさい。
5. 冊子の余白等は適宜数式の記述等に利用してもよいが、どのページも切り離してはいけません。
6. 試験終了後、この冊子は回収します。

受験番号 ()

氏 名 ()

数学 I

[1] 次の各問いに答えよ。

(1) $(2x-7)(4x^2-2x+3)$ を展開せよ。

(2) $(x+3y)(x+3y-7)+12$ を因数分解せよ。

(3) $A=3x^2-4x+1$ 、 $B=-4x^2+3$ 、 $C=2x^2+5x-7$ とするとき、 $2A-B+3C$ を x の整式として表せ。

(4) $x=\frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}$ のとき、 $x+\frac{1}{x}$ の値を求めよ。

(5) 次の連立不等式を解け。

$$\begin{cases} x+5 \geq 3x-1 \\ 1-x < 2(x+1) \end{cases}$$

(6) 1本 240 円のばらと 1本 300 円のゆりを合わせて 15 本買い、400 円の花かごに入れて、代金が 4500 円以下になるようにしたい。ゆりをなるべく多く入れるには、ばらとゆりをそれぞれ何本ずつ買えばよいか。なお、途中の計算過程も明記すること。

ばら _____ [本]、ゆり _____ [本]

(7) 2 次方程式 $6x^2 - 13x - 5 = 0$ の解を求めよ。

(8) $\sqrt{3}$ の整数部分を a 、小数部分を b とするとき、 $\frac{a}{b}$ の値はいくらか。

(9) $|2x-5|+1=x$ のとき、 x の値を求めよ。

(10) 連続する 3 つの自然数があり、3 つの自然数の積を 3 つの自然数の和で割った値が 96 となる
とき、この 3 つの自然数を求めよ。

(11) 次の連立不等式を解け。

$$\begin{cases} x^2 - 9x + 18 > 0 \\ x^2 - 8x + 7 < 0 \end{cases}$$

(12) 2 次方程式 $x^2 + (2k+2)x + k^2 - 5 = 0$ が実数解を持つような定数 k の範囲を求めよ。

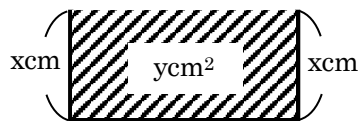
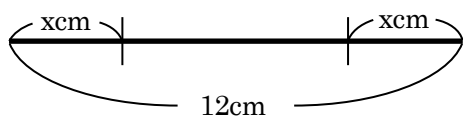
[2] 2 次関数 $y=ax^2+bx+c$ について、次の問いに答えよ。

(1) このグラフが、3 点 A (−2、0)、B (4、−12)、C (6、0) を通るとき、この 2 次関数のグラフの式を求めよ。

(2) (1) で求めた関数の頂点の座標を求めよ。

(3)(1)で求めた関数を x 軸方向に $+1$ 、 y 軸方向に $+10$ 平行移動したときのグラフの式を求めよ。

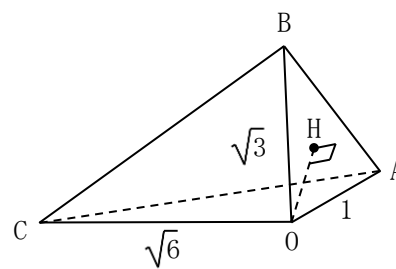
〔3〕幅 12cm の銅板を断面が次の図の形になるように折り曲げて、深さ x cm の溝をつくる。図の斜線部分の面積を y cm² とするとき、 y の最大値を求めよ。また、そのときの x の値を求めよ。



x _____ [cm]、 y _____ [cm²]

[4] 三角錐 $OABC$ は、 $OA=1$ 、 $OB=\sqrt{3}$ 、 $OC=\sqrt{6}$ 、 $\angle AOB=\angle BOC=\angle COA=90^\circ$ である。このとき、次の値を求めよ。

(1) 三角錐 $OABC$ の体積 V はいくらか。



(2) $\angle ABC$ は何度か。

(3) $\triangle ABC$ の面積 S はいくらか。

[1] 次の各問いに答えよ。

(1) $(2x-7)(4x^2-2x+3)$ を展開せよ。(5点)

(解説)

$$\begin{aligned} & (2x-7)(4x^2-2x+3) \\ &= 8x^3 - 4x^2 + 6x - 28x^2 + 14x - 21 \\ &= 8x^3 - 32x^2 + 20x - 21 \end{aligned}$$

(2) $(x+3y)(x+3y-7)+12$ を因数分解せよ。(5点)

(解説)

$$\begin{aligned} & (x+3y)(x+3y-7)+12 \\ & x+3y=A \text{ と置き換えて、} \\ & A(A-7)+12 \\ &= A^2-7A+12 \\ &= (A-3)(A-4) \\ &= (x+3y-3)(x+3y-4) \end{aligned}$$

(3) $A=3x^2-4x+1$ 、 $B=-4x^2+3$ 、 $C=2x^2+5x-7$ とするとき、 $2A-B+3C$ を x の整式として表せ。
(5 点)

(解説)

$$\begin{aligned} & 2A-B+3C \\ &= 2(3x^2-4x+1) - (-4x^2+3) + 3(2x^2+5x-7) \\ &= 6x^2-8x+2+4x^2-3+6x^2+15x-21 \\ &= 16x^2+7x-22 \end{aligned}$$

(4) $x=\frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}$ のとき、 $x+\frac{1}{x}$ の値を求めよ。(5 点)

(解説)

$$\begin{aligned} x &= \frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}} \\ &= \frac{5-2\sqrt{15}+3}{5-3} \\ &= \frac{8-2\sqrt{15}}{2} \\ &= 4-\sqrt{15} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{x} &= \frac{1}{4-\sqrt{15}} \\ &= \frac{1}{4-\sqrt{15}} \times \frac{4+\sqrt{15}}{4+\sqrt{15}} \\ &= \frac{4+\sqrt{15}}{16-15} \\ &= 4+\sqrt{15} \end{aligned}$$

$$\text{よって、} x+\frac{1}{x} = 4-\sqrt{15} + 4+\sqrt{15} = 8$$

(5) 次の連立不等式を解け。(5 点)

$$\begin{cases} x+5 \geq 3x-1 \\ 1-x < 2(x+1) \end{cases}$$

(解説)

$$x+5 \geq 3x-1$$

$$-2x \geq -6$$

$$x \leq 3 \quad \cdots \text{①}$$

$$1-x < 2(x+1)$$

$$1-x < 2x+2$$

$$-3x < 1$$

$$x > -\frac{1}{3} \quad \cdots \text{②}$$

①、②より、

$$-\frac{1}{3} < x \leq 3$$

(6) 1本 240 円のばらと 1本 300 円のゆりを合わせて 15 本買い、400 円の花かごに入れて、代金が 4500 円以下になるようにしたい。ゆりをなるべく多く入れるには、ばらとゆりをそれぞれ何本ずつ買えばよいか。なお、途中の計算過程も明記すること。(5 点)

(解説)

300 円のゆりを x 本買うとすると、240 円のばらは $(15-x)$ 本買うことになる。

代金の合計は、

$$300x + 240(15-x) + 400 \leq 4500$$

$$300x + 3600 - 240x + 400 \leq 4500$$

$$60x \leq 500$$

$$x \leq 8.33\ldots$$

x は整数なので、ゆりは最大 8 本買える。

そのときばらは $15-8=7$ 本となる。

$\therefore$ ばら 7 本、ゆり 8 本

ばら _____ [本]、ゆり _____ [本]

(7) 2 次方程式 $6x^2 - 13x - 5 = 0$ の解を求めよ。(5 点)

(解説)

$$6x^2 - 13x - 5 = 0$$

$$(2x - 5)(3x + 1) = 0$$

よって、 $x = \frac{5}{2}$ 、 $-\frac{1}{3}$

(8) $\sqrt{3}$ の整数部分を a 、小数部分を b とするとき、 $\frac{a}{b}$ の値はいくらか。(5 点)

(解説)

$$1 < \sqrt{3} < 2 \text{ より}$$

$\sqrt{3}$ の整数部分 a は 1 である。よって、 $\sqrt{3}$ の小数部分 b は $\sqrt{3} - 1$

なので、

$$\frac{a}{b} = \frac{1}{\sqrt{3} - 1}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3} - 1} \times \frac{\sqrt{3} + 1}{\sqrt{3} + 1}$$

$$= \frac{\sqrt{3} + 1}{3 - 1}$$

$$= \frac{\sqrt{3} + 1}{2}$$

(9) $|2x-5|+1=x$ のとき、 x の値を求めよ。(5 点)

(解説)

$$(i) 2x-5 < 0$$

$$2x < 5$$

$$x < \frac{5}{2} \quad \text{のとき} \quad |2x-5| = -(2x-5)$$

$$\text{よって、} -(2x-5)+1=x$$

$$-2x+5+1=x$$

$$-3x=-6$$

$$x=2$$

$$(ii) 2x-5 \geq 0$$

$$2x \geq 5$$

$$x \geq \frac{5}{2} \quad \text{のとき} \quad |2x-5| = 2x-5$$

$$\text{よって、} 2x-5+1=x$$

$$x=4$$

$$(i) (ii) \text{ より } x=2, 4$$

(10) 連続する 3 つの自然数があり、3 つの自然数の積を 3 つの自然数の和で割った値が 96 となるとき、この 3 つの自然数を求めよ。(5 点)

(解説)

連続する 3 つの自然数を、 x 、 $x+1$ 、 $x+2$ とすると、
条件より

$$x(x+1)(x+2) \div (x+x+1+x+2) = 96$$

$$x(x+1)(x+2) \div 3(x+1) = 96$$

$$x(x+2) \div 3 = 96$$

$$x^2+2x=288$$

$$x^2+2x-288=0$$

$$(x+18)(x-16)=0$$

$$x > 0 \text{ より、} x=16$$

よって、3 つの自然数は、16、17、18

(11) 次の連立不等式を解け。(5点)

$$\begin{cases} x^2 - 9x + 18 > 0 \\ x^2 - 8x + 7 < 0 \end{cases}$$

(解説)

$$x^2 - 9x + 18 > 0$$

$$(x-3)(x-6) > 0$$

$$x < 3, x > 6 \quad \cdots \textcircled{1}$$

$$x^2 - 8x + 7 < 0$$

$$(x-1)(x-7) < 0$$

$$1 < x < 7 \quad \cdots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{より}, 1 < x < 3, 6 < x < 7$$

(12) 2次方程式 $x^2 + (2k+2)x + k^2 - 5 = 0$ が実数解を持つような定数 k の範囲を求めよ。(5点)

(解説)

判別式 $D \geq 0$ のとき、2次方程式が実数解を持つので、

$$D = (2k+2)^2 - 4(k^2 - 5) \geq 0$$

$$4k^2 + 8k + 4 - 4k^2 + 20 \geq 0$$

$$8k \geq -24$$

$$k \geq -3$$

[2] 2次関数 $y=ax^2+bx+c$ について、次の問いに答えよ。

(1) このグラフが、3点A $(-2, 0)$ 、B $(4, -12)$ 、C $(6, 0)$ を通るとき、この2次関数のグラフの式を求めよ。(5点)

(解説)

A $(-2, 0)$ 、C $(6, 0)$ を通るので、求める関数は、

$$y=a(x+2)(x-6) \quad \cdots \text{①} \quad (a \neq 0)$$

とおける。これがB $(4, -12)$ を通るので、

$$-12=a(4+2)(4-6)$$

$$-12=-12a$$

$$a=1$$

①に $a=1$ を代入して

$$y=(x+2)(x-6)$$

$$=x^2-4x-12$$

(2) (1) で求めた関数の頂点の座標を求めよ。(5点)

(解説)

$$y=x^2-4x-12$$

$$=(x^2-4x+4)-4-12$$

$$=(x-2)^2-16$$

よって、頂点の座標は、 $(2, -16)$ となる。

(3) (1) で求めた関数を x 軸方向に $+1$ 、 y 軸方向に $+10$ 平行移動したときのグラフの式を求めよ。

(5 点)

(解説)

x に $x-1$ 、 y に $y-10$ を代入する。

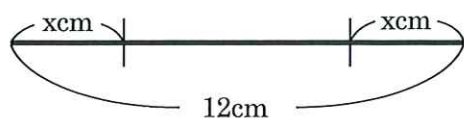
$$y-10=(x-1-2)^2-16$$

$$y=(x-3)^2-16+10$$

$$=x^2-6x+9-6$$

$$=x^2-6x+3$$

[3] 幅 12cm の銅板を断面が次の図の形になるように折り曲げて、深さ x cm の溝をつくる。図の斜線部分の面積を y cm² とするとき、 y の最大値を求めよ。また、そのときの x の値を求めよ。(10 点)



(解説)

底の幅は $(12-2x)$ cm であり、

$$x > 0, 12-2x > 0$$

であるから、

$$0 < x < 6 \quad \cdots \quad \textcircled{1}$$

この範囲において面積は、

$$y = x(12-2x)$$

$$= 12x - 2x^2$$

$$= -2x^2 + 12x$$

$$= -2(x^2 - 6x + 9) + 18$$

$$= -2(x-3)^2 + 18$$

$x=3$ のとき、 y の最大値は 18

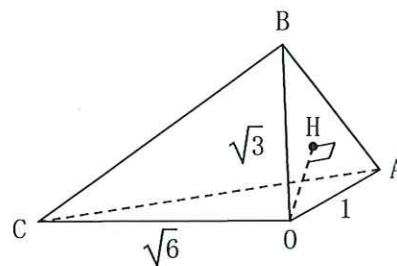
x _____ [cm]、 y _____ [cm²]

[4] 三角錐 OABC は、 $OA=1$ 、 $OB=\sqrt{3}$ 、 $OC=\sqrt{6}$ 、 $\angle AOB=\angle BOC=\angle COA=90^\circ$ である。このとき、次の値を求めよ。

(1) 三角錐 OABC の体積 V はいくらか。(5 点)

(解説)

$$\sqrt{6} \times 1 \times \frac{1}{2} \times \sqrt{3} \times \frac{1}{3} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$



(2) $\angle ABC$ は何度か。(5 点)

(解説)

三平方の定理より

$$\begin{aligned} AB^2 &= (\sqrt{3})^2 + 1^2 \\ &= 4 \end{aligned}$$

$AB > 0$ より、 $AB=2$

$$\begin{aligned} BC^2 &= (\sqrt{6})^2 + (\sqrt{3})^2 \\ &= 9 \end{aligned}$$

$BC > 0$ より、 $BC=3$

$$\begin{aligned} AC^2 &= (\sqrt{6})^2 + 1^2 \\ &= 7 \end{aligned}$$

$AC > 0$ より、 $AC=\sqrt{7}$

余弦定理より

$$\cos B = \frac{2^2 + 3^2 - (\sqrt{7})^2}{2 \times 2 \times 3}$$

$$= \frac{4 + 9 - 7}{12}$$

$$= \frac{6}{12}$$

$$= \frac{1}{2}$$

$$\angle ABC = 60^\circ$$

(3) △ABC の面積 S はいくらか。(5 点)

(解説)

$$S = 3 \times 2 \times \sin 60^\circ \times \frac{1}{2}$$

$$= 3 \times \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$= \frac{3}{2} \sqrt{3}$$